ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

LÀNH THỊ THÙY

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ HÀM ĐƠN ĐIỆU TOÁN TỬ VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
———————o0o———————

LÀNH THỊ THÙY

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ HÀM ĐƠN ĐIỆU TOÁN TỬ VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. HỒ MINH TOÀN

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Hồ Minh Toàn**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Lành Thị Thùy

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, **T.S Hồ Minh Toàn**.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Lành Thị Thùy

Mục lục

Lời mở đầu

Ngày nay, tầm quan trọng của lý thuyết ma trận được biết đến trong nhiều lĩnh vực về kỹ thuật, xác suất thống kê, thông tin lượng tử, giải tích số, sinh học và khoa học xã hội. Đặc biệt, giải tích ma trận trở thành một chủ đề độc lập trong toán học bởi một số lượng lớn các ứng dụng của nó. Chủ đề về giải tích ma trận được thảo luận trên đại số các ma trận, hoặc tương đương, đại số của các toán tử tuyến tính trong không gian Hilbert hữu hạn chiều. Đại số các toán tử tuyến tính trên không gian Hilbert n chiều đẳng cấu với đại số các ma trận vuông cấp n. Một trong các công cụ chính trong giải tích ma trận là định lý phổ trong trường hợp hữu hạn chiều.

Gần đây, nhiều lĩnh vực của giải tích ma trận được nghiên cứu kỹ lưỡng như lý thuyết về các hàm đơn điệu ma trận và hàm lồi ma trận, lý thuyết về trung bình ma trận, lý thuyết phân hóa trong thông tin lượng tử,... Lý thuyết về các hàm như vậy được nghiên cứu mạnh và trở thành một chủ đề quan trọng trong lý thuyết ma trận vì những ứng dụng rộng lớn của chúng trong lý thuyết ma trận cũng như trong lý thuyết lượng tử. Hàm đơn điệu toán tử lần đầu tiên được C. Löwner nghiên cứu trong bài báo [1] của ông năm 1934. Năm 1936, Kraus đã chứng minh tính đơn điệu toán tử có mối quan hệ chặt chẽ với tính lồi toán tử. Năm 2008, một số ứng dụng của lớp hàm này trong lý thuyết lượng tử được nhà toán học Dénes Petz trình bày trong tài liệu chuyên khảo [2]. Tài liệu chuyên khảo [3] của nhà toán học F. Hiai và [4] của nhà toán học R. Bhatia là những cẩm nang khá đầy đủ và chi tiết về hàm đơn điệu toán tử. Bản luận văn đã trình bày lại một số kết quả chọn lọc về hàm đơn điệu toán tử và ứng dụng của nó được trích dẫn từ những tài liệu trên.

Ngoài phần mở đầu, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo, luận văn gồm hai chương sau

Chương 1. **Hàm đơn điệu toán tử**

Trong Chương này tôi trình bày: Thứ nhất, hệ thống hóa kiến thức cơ bản về ma trận và toán tử tuyến tính. Thứ hai, trình bày định nghĩa hàm toán tử (hàm ma trận) và một số tính chất của hàm toán tử. Thứ ba, trình bày định nghĩa hàm đơn điệu toán tử cùng một số định lý liên quan, đồng thời đưa ra một số ví dụ nhằm minh họa cho lớp hàm này.

Chương 2. **Một số ứng dụng của hàm đơn điệu toán tử**

Đây là phần chính của luận văn. Tôi trình bày ứng dụng của hàm đơn điệu toán tử trong Bất đẳng thức Hansen-Pedersen, cho thấy mối liên hệ chặt chẽ giữa hàm đơn điệu toán tử và hàm lồi toán tử. Trình bày ứng dụng của lớp hàm này trong Bất đẳng thức Power-Stømer, tôi nhắc lại kiến thức về Vết và trình bày chứng minh cụ thể cho Bất đẳng thức này. Đồng thời trình bày ví dụ cụ thể nhằm minh họa cho ứng dụng của lớp hàm này.

Do khả năng và thời gian còn khá hạn chế nên luận văn không tránh khỏi nhiều thiếu sót. Ngoài ra, một số kết quả đã được trích dẫn được thừa nhận mà bỏ qua chứng minh. Tôi rất mong nhận được sự góp ý quý báu từ quý thầy cô để bản luận văn hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2019

Tác giả

Lành Thị Thùy

Chương 1

Hàm đơn điệu ma trận

Trong phần này, chúng ta nghiên cứu các kết quả về hàm ma trận và hàm đơn điệu ma trận.

1.1 Một số kiến thức cơ bản

1.1.1 Ma trận

Trong phần này, ta trích lược một số kiến thức và ký hiệu về ma trận (toán tử) liên quan đến nội dung chính của luận văn.

- Ký hiệu $\mathbb{M}_{mn}$ là vành các ma trận cấp $m \times n$ trên trường phức $\mathbb{C}$. Ta thường ký hiệu các chữ cái in là các ma trận. Ví dụ X là ma trận thì phần tử hàng thứ i cột j của X sẽ được viết là x_{ij}.

Các ma trận sau là các ma trận vuông cấp n.

- Ký hiệu $X := Diag(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là ma trận đường chéo (hay ma trận chéo), tức là các phần tử x_{ij} đều bằng 0 nếu $i \neq j$ và $x_{ii} = x_i$ với mọi i. Ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị*. Ký hiệu là I.
- Ma trận $X^* := (\overline{X})^T = (\overline{x_{ji}})$ là *ma trận liên hợp* của X. X được gọi là *tự liên hợp* (hay *Hermite*) nếu $X^* = X$. Ký hiệu $\mathbb{M}_n^{sa}$ là tập tất cả các ma trận tự liên hợp cấp n.

- Một ma trận E được gọi là Unita nếu $E^{-1} = E^*$. Trong trường hợp này thì $EE^* = E^*E = I$ và các cột của E là một hệ trực chuẩn.
- Ma trận A được gọi là ma trận chuẩn tắc nếu $AA^* = A^*A$. Ma trận Hermite và ma trận Unita là hai trường hợp đặc biệt của ma trận chuẩn tắc.

1.1.2 Toán tử tuyến tính

Trong luận văn này $\mathcal{H}$ được ký hiệu là không gian Hilbert n chiều $\mathcal{H}$ với tích vô hướng $\langle .,. \rangle$, và $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ là tập các ánh xạ tuyến tính (hay toán tử tuyến tính) từ $\mathcal{H}$ vào chính nó. Ta biết, vì $\mathcal{H}$ là không gian hữu hạn chiều nên mọi ánh xạ tuyến tính đều liên tục. Cố định một cơ sở chuẩn $\mathcal{E} := \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ của $\mathcal{H}$.

Khi đó, ta có một tương ứng

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to & \mathbb{M}_n \\ X \mapsto & (x_{ij})_{i,j=1}^n, \end{aligned}$$

trong đó $(x_{ij})_{i,j=1}^n$ là ma trận của toán tử X đối với cơ sở $\mathcal{E}$. Tương ứng Θ này là đẳng cấu tuyến tính thỏa mãn

$$\Theta(XY) = \Theta(X)\Theta(Y), \Theta(X^*) = (\Theta(X))^*, \forall X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$

trong đó toán tử X^* là toán tử liên hợp của X xác định bởi

$$\langle x, Xy \rangle = \langle X^*x, y \rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Nhờ đẳng cấu này, ta có thể đồng nhất $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ với $\mathbb{M}_n$. Thay vì nghiên cứu trên $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ta nghiên cứu trên $\mathbb{M}_n$. Vì vậy hàm toán tử ta cũng có thể gọi là hàm ma trận trong suốt luận văn này.

Như trong ánh xạ tuyến tính ta có một số khái niệm và kết quả sau:

Định nghĩa 1.1.1.

(i) Ma trận $X \in \mathbb{M}_n$ được gọi là nửa xác định dương nếu $\langle u, Xu \rangle \geq 0, \forall u \in \mathcal{H}$. Ký hiệu $X \geq 0$.

(ii) Ma trận $X \in \mathbb{M}_n$ được gọi là xác định dương nếu $\langle u, Xu \rangle > 0, \forall u \in \mathcal{H}$ và $u \neq 0$. Ký hiệu $X > 0$.

Cho $X, Y \in \mathbb{M}_n^{sa}$ ta viết $X \geq Y$ nghĩa là $X - Y \geq 0$.

Tính chất cơ bản sau được trích trong [3], Mệnh đề 1.3.2.

Mệnh đề 1.1.2. *Cho $X, Y \in \mathbb{M}_n^{sa}$. Khi đó*

$$X \geq Y \Rightarrow C^*XC \geq C^*YC,\ \forall C \in \mathbb{M}_n.$$

Chứng minh. Lấy bất kỳ véc tơ u, ta có

$$\langle u, C^*YCu \rangle = \langle Cu, YCu \rangle \geq \langle Cu, XCu \rangle = \langle u, C^*XCu \rangle .$$

Do đó $C^*YC \geq C^*XC$. □

Giả sử W là không gian con (đóng) của $\mathcal{H}$. Khi đó

$$\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$$

Ta gọi ánh xạ tuyến tính $T(x) = x_1$, trong đó x được biểu diễn duy nhất $x = x_1 + x_2$ với $x_1 \in W, x_2 \in W^{\perp}$, là toán tử chiếu trực giao lên W. Sau này ta nói toán tử chiếu (hay phép chiếu) nghĩa là toán tử chiếu trực giao. Đặc trưng đại số sau đây được trích trong [3], Mệnh đề 1.3.4.

Mệnh đề 1.1.3. *Giả sử $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương*

(i) T là toán tử chiếu;

(ii) $T^* = T = T^2$.